ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2020

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.

Дифференциальное исчисление функций: Учебное пособие / Литвин Д.Б. – Ставропольский гос. аграрный университет. - Ставрополь, 2020. – 80 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 - Экономика. Содержание материала в целом соответствует первой части дисциплины «Математический анализ».

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДЕЛЫ

1.1. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются:

$N=\{1;2;3;...;n;...\}$ - множество натуральных чисел;

$Z_0=\{0;1;2;...;n;...\}$ - множество целых неотрицательных чисел;

$Z=\{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$ - множество целых чисел;

$Q=\left\{\frac{m}{n}: m\in Z,\ n\in N\right\}$ - множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел;

R - множество действительных чисел;

C - множество комплексных чисел.

Между этими множествами существуют соотношения

$$N\subset Z_0\subset Z\subset Q\subset R\subset C, \qquad R=Q\cup I.$$

1.2. Функции

Функцией называется соответствие *f,* которое каждому элементу $x\in X$ сопоставляет *один и только один* элемент $y\in Y$, и записывается $y=f(x)$, $x\in X$. Говорят еще, что функция f отображает множество *X* на множество *Y*.

Основные элементарные функции

1) Показательная функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$;
2) Степенная функция $y=x^\alpha$, $\alpha\in R$;
3) Логарифмическая функция $y=log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$;
4) Тригонометрические функции $y=sinx$, $y=cosx$, $y=tgx$, $y=ctg\ x$;
5) Обратные тригонометрические функции $y=arcsinx$, $y=arccosx$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

1.3. Числовая последовательность. Предел последовательности

Под числовой последовательностью $x_1,x_2,x_3,...,x_n,...$,обозначается $\{x_n\}$, понимается функция натурального аргумента

$$x_n=f(n),\ \ n\in N \tag{1}$$

Например, $x_n=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n}\right\}$, $y_n=\{1,4,9,...,n^2\}$.

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Неравенство (2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$ которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

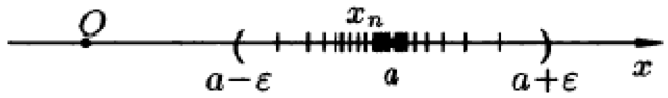


Рисунок 1 - ε-окрестность точки a

При выполнении $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к значению a.

1.4.Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X и пусть $x_0 \in X$. Возьмем из множества X последовательность $x_1, x_2, ..., x_n, ...,$ элементы которой отличны от x_0 $(x_n \neq x_0)$, сходящуюся к x_0. Последовательность функции $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ тоже образуют числовую последовательность.

Определение 1 (по Гейне). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности значений аргумента $\{x_n\}$, отличных от x_0, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к числу A.

Записывают $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

Функция $y = f(x)$ в точке x_o может иметь только один предел.

Определение 2 (по Коши). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (см. рис.2).

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В определении предела функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: слева, справа от x_0 или колеблясь около этой точки. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов (см. рис. 3).

Предел слева и справа записывают соответственно:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1; \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Если в точке x_0 существуют оба предела и они равны $A_1 = A_2$, то существует и предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

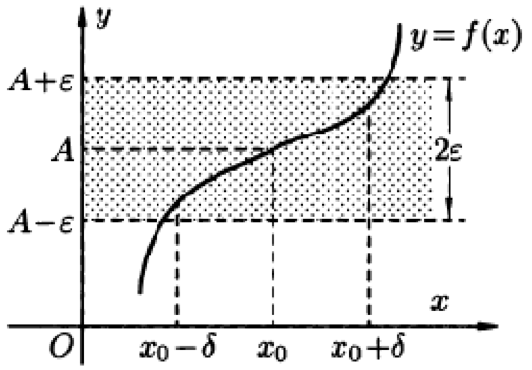


Рисунок 2 - Определение предела

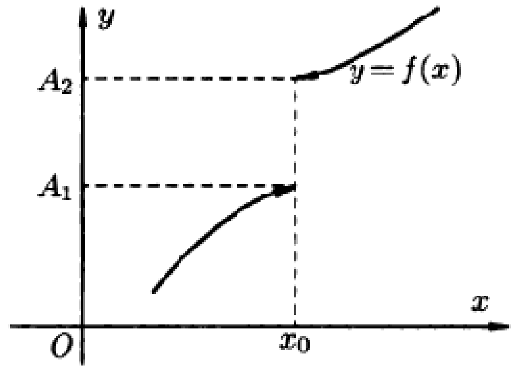


Рисунок 3 - Односторонние пределы

1.5.Бесконечно большая и малая функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) *при* $x \to x_0$, если для сколь угодно большого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) *при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. Например, функция $y = x^2$ при $x \to 0$ есть б.м.ф.

Основные теоремы о бесконечных функциях

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.
3. Если функция $\alpha(x)$ - бесконечно малая $\alpha \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ - бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

1.6. Основные теоремы о пределах

1) Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, а $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B$, то

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = A \pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot \varphi(x)\right] = A \cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)/\varphi(x)\right] = A/B,\ (B \neq 0).$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$.

3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} C = C$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} C f(x) = C \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)$.

Важнейшие эквивалентности

1) $\sin x \sim x$;
2) $tg\, x \sim x$;
3) $\arcsin x \sim x$;
4) $arctg\, x \sim x$;
5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
6) $e^x - 1 \sim x$;
7) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$;
8) $\ln(1+x) \sim x$;
9) $\log_a(1+x) \sim x/\ln a$;
10) $(1+x)^k - 1 \sim kx$;

(в частности $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$).

1.7. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1. \qquad (3)$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4}$$

Вычисление пределов

1. Если при $x \to x_0$ функция определена, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Если функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена, то необходимо пользуясь свойствами пределов "раскрыть" неопределенность одного из типов

«$0/0$»; «∞/∞»; «$0\cdot\infty$»; «$\infty-\infty$»; «1^∞»; «0^0»; «∞^0».

1.8. Решение типовых примеров

Вычислить пределы:

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}$.

Решение

Так как $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+1\right) = 5 \neq 0$, то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-2}{x^2+1} = \frac{4+2-2}{4+1} = \frac{4}{5}.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.

Решение

Функция $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ в точке $x = 2$ не определена. Так как при $x = 2$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида «$\dfrac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на $x-2$. Для этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$, так как $x^2-5x+6 = 0$ при $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$.

$x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$, так как $x^2-3x+2 = 0$ при $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$.

Итак, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-1} = \frac{2-3}{2-1} = -1.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-\sqrt{x+6}}{x-3}$.

Решение

При $x = 3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность «$\frac{0}{0}$». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на $x-3$. Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению $3-\sqrt{x+6}$, то есть на выражение $3+\sqrt{x+6}$, получим

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(3-\sqrt{x+6}\right)\left(3+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)} = \{$перемножив сопряженные выражения $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, избавимся от иррациональности$\}$ =

$$= \lim_{x\to 3}\frac{9-(x+6)}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)} =$$

$$= -\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(3+\sqrt{x+6}\right)} = -\frac{1}{3+\sqrt{3+6}} = -\frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{x\cdot x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} =$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2 = 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2 = 8\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 = 8\cdot 1 = 8$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^3+1\right) = \infty;\quad \lim_{x\to\infty}\left(3x^2+2x-1\right) = \infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида «$\frac{\infty}{\infty}$». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Решение

В заданном примере имеем неопределенность вида «$\infty-\infty$». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)=\infty$, значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

Пример 7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$.

Решение

Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом (3)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin5x}{5x}=5\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=5\cdot1=5.$$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{4x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+4-4-3}{2x+4}\right)^{4x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{2x+4}\right)^{4x+2}=1^{\infty}.$$

Имеем неопределенность вида «1^{∞}». Используем второй замечательный предел (4) и следующую подстановку

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{7}{2x+4}\right)^{4x+2}=\left|\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{7}{2x+4}\\ x\to\infty;\alpha\to 0\\ x=-\dfrac{7}{2\alpha}-2\end{array}\right|=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{4\left(-\frac{7}{2\alpha}-2\right)+2}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{-\frac{14}{\alpha}-6}=\left(\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-14}\cdot\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{-6}=e^{-14}.$$

Вычислить односторонние пределы:

Пример 9. $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{4}{\left(x-2\right)^{3}}$.

Решение

Пусть $x<2$, тогда при $x\to 2-0$ функции $x-2$ и $\left(x-2\right)^{3}$ являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому $\dfrac{4}{\left(x-2\right)^{3}}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Следовательно,

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{4}{\left(x-2\right)^{3}}=-\infty.$$

При $x>2$ функции $x-2$ и $\left(x-2\right)^{3}$ – положительные бесконечно малые, поэтому $\dfrac{4}{\left(x-2\right)^{3}}$ – положительная бесконечно большая функция, тогда

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{4}{\left(x-2\right)^{3}}=+\infty.$$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

Решение

При $x\to 1-0$ функция $x-1$ – отрицательная бесконечно малая, следовательно $\dfrac{1}{x-1}$ – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно малая функция. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1.$

При $x \to 1+0$ функция $x-1$ – положительная бесконечно малая, следовательно, $\dfrac{1}{x-1}$ – положительная бесконечно большая функция. Тогда $2^{\frac{1}{x-1}}$ – бесконечно большая положительная функция. Таким образом $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0.$

1.9.Задания для самостоятельной работы:

Найти пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$**.**

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$**.**

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$**.**

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-x}{x^2+10}$**.**

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+2}{x+10^{10}}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5x-6}{3x^2+7x-x^3-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

10. $\lim\limits_{n\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{n+3}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-1}\right)^{2x-3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tgx\right)^{ctgx}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{8-x}}{3x^2-8x-3}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \sin 3x\cdot ctg 5x$

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x-3}$

2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

2.1. Непрерывность функции в точке

Функция $y=f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0, если она определена в точке x_0 и в ее окрестности; существует предел функции в этой точке, причем равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (5)$$

Или: *функция* $y=f\left(x\right)$ *называется непрерывной в точке* x_0*,* если она определена в точке x_0 и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0. \qquad (6)$$

Функция $y=f\left(x\right)$ *называется непрерывной, в интервале* $\left(a,b\right)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

2.2. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Они разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 ***называется точкой разрыва первого рода*** функции $y=f(x)$*,* если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$. При этом:

а) если $A_1=A_2$, то точка x_0 называется точкой, устранимого разрыва;

б) если $A_1\neq A_2$, то точка x_0 называется точкой, конечного разрыва. Величину $\left|A_1-A_2\right|$ называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 ***называется точкой разрыва второго рода*** функции $y=f\left(x\right)$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

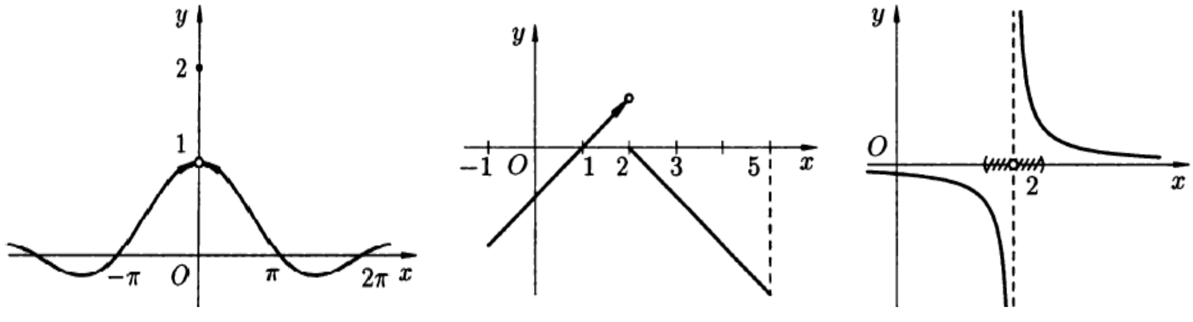


Рисунок 4 - Точки разрыва

Задания для самостоятельной работы:

Задана функция y=f(x). Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, \text{ если } x<-1, \\ x^2+2, \text{ если } -1\le x<1, \\ 2x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ если } 0<x<1, \\ x, \text{ если } x\ge 1. \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2x+3}$$

3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

3.1. Определение. Уравнения касательной и нормали к кривой

Производной функции $y = f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (7)$$

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной.*

Производная $f'(x)$ в точке x равна угловому коэффициенту касательной $k = tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. В этом заключается *геометрический смысл производной* (см. рис.5).

Уравнение касательной к графику функции в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (8)$$

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент $k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{f'(x)}$. Поэтому *уравнение нормали* имеет вид (см. рис.6):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad \text{(если } f'(x_0) \neq 0\text{).} \qquad (9)$$

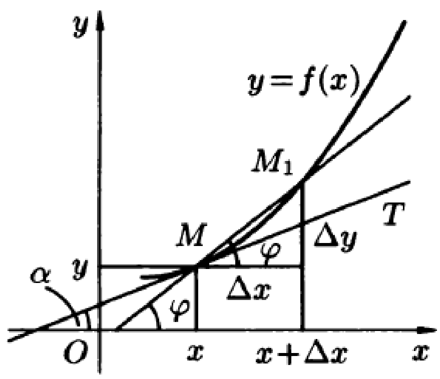


Рисунок 5 - Геометрический смысл производной

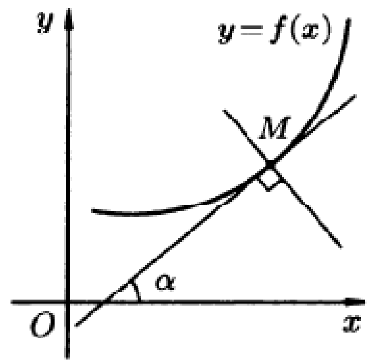


Рисунок 6 - Касательная и нормаль к графику функции

Таблица производных представлена в приложении 1.

Пример 1. Найти производную функции $y = 7^{x^2 - 4x}$.

$$y' = (7^{x^2-4x})' = 7^{x^2-4x} \cdot ln7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2-4x} \cdot ln7 \cdot (2x - 4).$$

Пример 2. Найти производные функций: 1) $y = arccosx^2$; 2) $y = x \cdot arctgx$;

3) $y = \left(1 + 5x - 3x^3\right)^4$; 4) $y = arccos\sqrt{x}$; 5) $y = log_2^3\left(3 + 2^{-x}\right)$.

1) $((arccosx^2)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}};$

2) $\left(x \cdot arctgx\right)' = x' \cdot arctgx + x \cdot \left(arctgx\right)' = arctgx + \dfrac{x}{1+x^2};$

3) $\left(\left(1+5x-3x^3\right)^4\right)' = 4\left(1+5x-3x^3\right)^3 \cdot \left(5-9x^2\right);$

4) $\left(arccos\sqrt{x}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$

5) $(log_2^3(3+2^{-x}))' = 3log_2^2(3+2^{-x}) \cdot \dfrac{1}{(3+2^{-x})ln3} \cdot 2^{-x} \cdot ln2 \cdot (-1).$

Пример 3. Найти производную функции $y = log_2^3\left(tgx^4\right)$.

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций: $y = u^3$, где $u = log_2 z$, где $z = tgq$, где $q = x^4$. По правилу дифференцирования сложной функции $(y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x)$ получаем:

$$y'_x = 3 \cdot log_2^2 tgx^4 \cdot \frac{1}{tgx^4 \cdot ln2} \cdot \frac{1}{cos^2 x^4} \cdot 4x^3.$$

Задания для самостоятельной работы:

Найти производные функций:

1. $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$

2. $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3. $y = sin6x$

4. $y = \left(1 - 5x\right)^4$

5. $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

6. $y = \ln\left(1 + \cos x\right)$

7. $y = a^{\sin x}$

8. $y = \arcsin\sqrt{1 - 4x}$

9. $y = \ln\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$

10. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$

11. $y=(e^{\cos x}+3)^2$

12. $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$

13. $y=x^{\frac{1}{x}}$

14. $y=\dfrac{1}{tg^2 2x}$

15. $y=\dfrac{x}{x-1}\ln x$

16. $y = \dfrac{sin^2 x}{2 + 3cos^2 x}$

17. $y = \sqrt{2x - sin\,2x}$

18. $y = ln\dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

19. $y = ln\,cos\,x - \dfrac{1}{2}cos^2 x$

Найти уравнения касательной и нормали к графику $y = x^2$ в точке $x = 2$. Построить полученные графики.

3.2. Дифференцирование неявно заданной функции

Если неявная функция задана уравнением $F\left(x;y\right)=0$, то для нахождения производной от *y* по *x* достаточно продифференцировать это уравнение по *x*, рассматривая при этом *y* как функцию *x*, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Пример. Найти производную функции $x^3+y^3-3xy=0$.

Решение: Функция *y* задана неявно. Дифференцируем по *x* равенство $x^3+y^3-3xy=0$. Из полученного соотношения $3x^2+3\cdot y^2\cdot y'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0$ следует, что $y^2y'-xy'=y-x^2$, т.е. $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

3.3. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом *x* и функцией *y* задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}, \qquad (10)$$

где *t* - вспомогательная переменная, называемая параметром.

Функцию $y=f(x)$, определяемую параметрическими уравнениями (10), можно рассматривать как сложную функцию $y=y(t)$, где $t=\varphi\left(x\right)$ - обратная для $x=x(t)$ функция. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x \quad \text{или} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (11)$$

Пример. Пусть $\begin{cases}x=t^3,\\ y=t^2.\end{cases}$. Найти y'_x.

$x'_t=3t^2$, $y'_t=2t$, следовательно, $y'_x=\dfrac{2t}{3t^2}$, т. е. $y'_x=\dfrac{2}{3t}$.

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость *y* от *x*. Действительно, $t=\sqrt[3]{x}$. Тогда $y=\sqrt[3]{x^2}$. Отсюда $y'_x=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, т. е. $y=\dfrac{2}{3t}$.

3.4. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

Пример 1. Найти производную функции

$$y=\frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение: Можно найти y' с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$ln\,y=ln(x^2+2)+\frac{3}{4}ln(x-1)+x-3ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{x^2+2}\cdot 2x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+1-3\cdot\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y': $$y'=y\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right),$$

т. е. $$y'=\frac{(x^2+2)\cdot\sqrt[4]{(x-1)^3}\cdot e^x}{(x+5)^3}\cdot\left(\frac{2x}{x^2+2}+\frac{3}{4(x-1)}+1-\frac{3}{x+5}\right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция $y=u^v$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - заданные дифференцируемые функции от x. Найдем производную этой функции:

$$ln\,y=v\cdot lnu,\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot y'=v'\cdot lnu+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u',\Rightarrow y'=y(v'\cdot lnu+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'),$$

т.е. $$y'=u^v(v'\cdot lnu+v\cdot\frac{1}{u}\cdot u'),$$

или $$(u^v)'=u^v\cdot lnu\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'. \qquad (12)$$

Итак: *производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии* $u=const$, *и производной степенной функции, при условии* $v=const$.

Пример 2. Найти производную функции $y=\left(sin2x\right)^{x^2+1}$.

Решение: Пользуясь формулой (12), получаем:

$$y'=(sin\,2x)^{x^2+1}\cdot ln\,sin\,2x\cdot 2x+(x^2+1)(sin\,2x)^{x^2}\cdot cos\,2x\cdot 2.$$

3.5.Производные высших порядков явно заданной функции

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$.

Пример. Найти производную 4-го порядка функции $y = sinx$.

Решение:

$$y' = \left(\sin x\right)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(cosx\right)' = -sinx = sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),$$

$$y''' = \left(-\sin x\right)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin(x + \frac{\pi}{2}\cdot 4).$$

3.6.Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно в виде уравнения $F\left(x; y\right) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по *x* и разрешив полученное уравнение относительно y', найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по *x* первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут *x*, *y* и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через *x* и *y*.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Пример. Найти y''', если $x^2 + y^2 = 1$.

Дифференцируем уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ по *x*: $2x + 2y \cdot y' = 0$.

Отсюда $y' = -\dfrac{x}{y}$. Далее имеем:

$$y'' = -\frac{1\cdot y - x\cdot y'}{y^2}, \text{ т.е. } y'' = -\frac{y - x\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \text{ (т. к. } x^2 + y^2 = 1\text{)},$$

следовательно, $y''' = -\dfrac{-1\cdot 3y^2\cdot y'}{y^6} = \dfrac{3}{y^4}\cdot\left(-\dfrac{x}{y}\right) = -\dfrac{3x}{y^5}$.

3.7.Производные высших порядков параметрически заданных функций

Из определения второй производной и равенства (11) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t\cdot t'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}, \qquad \text{т. е.} \qquad y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}. \qquad (13)$$

Аналогично получаем $y'''_{xxx} = \dfrac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$, $y^{IV}_{xxxx} = \dfrac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \ldots$

Пример. Найти вторую производную функции $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$,

Решение: По формуле (11)

$$y'_x = \frac{(\sin t)'_t}{(\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -ctgt.$$

Тогда по формуле (13): $y''_{xx} = \dfrac{(-ctgt)'_t}{(\cos t)'_t} = \dfrac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\dfrac{1}{\sin^3 t}.$

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти производные данных функций.

а) $\dfrac{y}{x} = arctg\dfrac{x}{y}$

б) $y\sin x = \cos(x - y)$

в) $tg\frac{y}{x} = 5x$

г) $y^2x = e^{\frac{y}{x}}$

2.Найти производную 2-го порядка:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

3.Найти вторую производную функций

$$\begin{cases} x = cos\dfrac{t}{2}, \\ y = t - sin\,t. \end{cases}$$

4.Найти y'', если:

$x - y + a\sin y = 0$

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом функции $y = f(x)$ *в точке* x *называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается* dy:

$$dy = f'(x) \cdot dx . \tag{14}$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

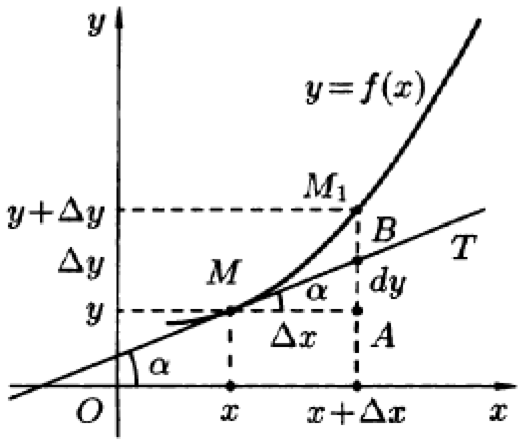


Рисунок 7 - Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции ($dy = AB$, см. рис.7), когда x получит приращение Δx.

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x) = 3x^2 - sin(l + 2x)$.

Решение: По формуле $dy = f'(x)dx$ находим

$$dy = \left(3x^2 - sin\left(l + 2x\right)\right)' dx = \left(6x - 2cos\left(l + 2x\right)\right)dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}$. Вычислить dy при $x = 0$.

Решение:

$$dy = \left(ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}\right)' dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)dx.$$

Подставив $x = 0$, получим

$$dy\big|_{x=0} = \left(\frac{10}{2} + 0\right)dx = 5dx.$$

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции $dy = f'(x)dx$ и соответствующие теоремы о производных.

Первый дифференциал функции $y = f(x)$ определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью*** (неизменностью) формы первого дифференциала

$$dy = y'_u \cdot du, \quad \text{если } y = f(u), \; u = \varphi(x). \tag{15}$$

4.1.Применение дифференциала к приближенным вычислениям основано на приближенном равенстве, справедливом при малых Δx

$$\Delta y \approx dy. \tag{16}$$

Подставляя в равенство (16) значения Δy и dy, получим

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x;$$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x, \tag{17}$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше Δx.

Формула (17) используется для вычислений приближенных значений функций.

Пример. Вычислить приближенно $arctg\,1,05$.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = arctgx$. По формуле (17) имеем:

$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + (arctgx)'\cdot\Delta x,$$

т. е.
$$arctg(x+\Delta x) \approx arctgx + \frac{\Delta x}{1+x^2}$$

Так как $x+\Delta x = 1,05$, то при $x=1$ и $\Delta x = 0,05$ получаем:

$$arctg\,1,05 \approx arctg\,1 + \frac{0,05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

4.2.Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции $y=f(x)$ называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d^2y.

$$d^2y = f''(x)dx^2. \tag{18}$$

Здесь dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Аналогично определяется и находится дифференциал n-го порядка:

$$d^3y = f'''(x)(dx)^3; \qquad d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Пример. Найти d^2y, если $y = e^{3x}$ и x - независимая переменная.

Решение: Так как $y' = 3e^{3x}, y'' = 9e^{3x}$, то по формуле (18) имеем $d^2y = 9e^{3x}dx^2$.

Задания для самостоятельной работы:

1.Найти дифференциал функции:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 3x;$

б) $y=\sqrt{1+x^2}\,;$

в) $r=2\varphi-\sin 2\varphi;$

г) $x=\dfrac{1}{t^2};$

д) $d\left(\dfrac{a}{x}+arctg\dfrac{x}{a}\right);$

2. Найти d^2y, если

а) $y=e^{\cos 5x}$

б) $y=\sin^4 3x$

в) $y = 3^{arctgx^3}$

г) $y = 2tg^3(x^2 + 1)$

4. Вычислить приближенные значения выражений:

а) $arcsin\,0,51$

б) $\sqrt[4]{15,8}$

в) $tg46^o$

5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

5.1. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке: $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$. Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности точки x_0.

Тогда, *предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l. \qquad (19)$$

Замечания:

1. Правило Лопиталя (19) верно и в случае, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ не определены при $x=x_0$, но $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0.$

2. Формула (19) справедлива и в том случае, когда $x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ выражения (19), то правило Лопиталя можно применить еще раз:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9.$$

Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называют *основными*. Неопределенности вида $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$ сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение: Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Логарифмируем выражение $A=\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$, получим: $\ln A=\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x$. Затем находим предел:

$$\lim_{x\to 0}\ln A=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\left(-\sin 2x\right)2}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{2x}=-2,$$

т. е. $\ln\lim\limits_{x\to 0}A=-2$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 0}A=e^{-2}$, и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-2}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{tgx}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - arctgx}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

5.2.Исследование функций

Возрастание и убывание функции. Условия экстремума

Если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$ для $\forall x \in (a;b)$.

Необходимое условие экстремума: если *дифференцируемая* функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0.$ Геометрически равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Отметим, что обратное утверждение в общем случае не является верным, т. е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 - точка экстремума.

Кроме того, существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но точка $x = 0$ - точка минимума.

Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются *критическими*.

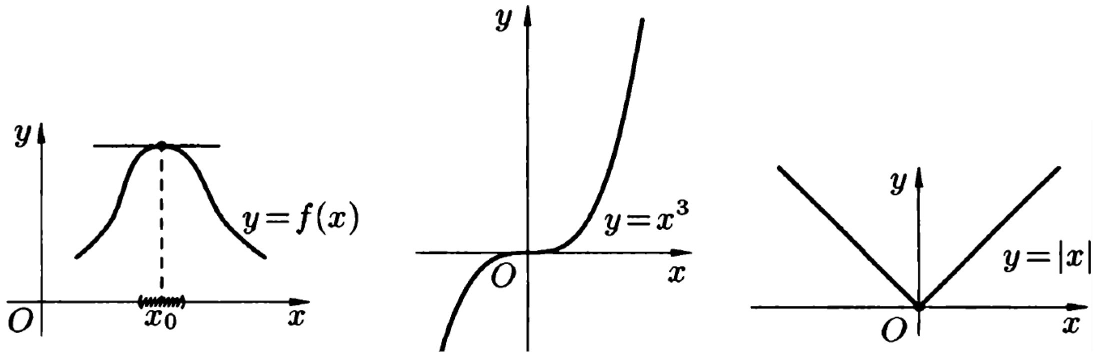


Рисунок 8 - Критические точки

Достаточное условие экстремума: если непрерывная функция $y = f(x)$ *дифференцируема* в некоторой δ-окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) *производная* $f'(x)$ *меняет знак* с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

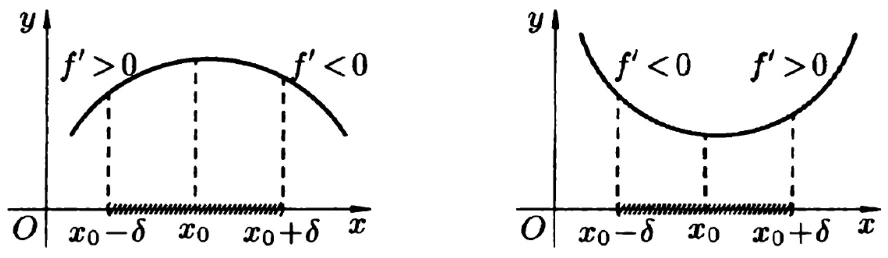


Рисунок 9 - Достаточное условие экстремума

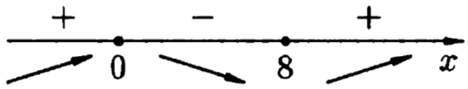
Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы.

Пример. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: Очевидно, $D(y) = R$.

Находим $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$, т. е. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x_1 = 0$ и равна нулю при $x_2 = 8$. Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала $(-\infty;0)$, $(0;8)$, $(8;\infty)$. Отметим на рисунке знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

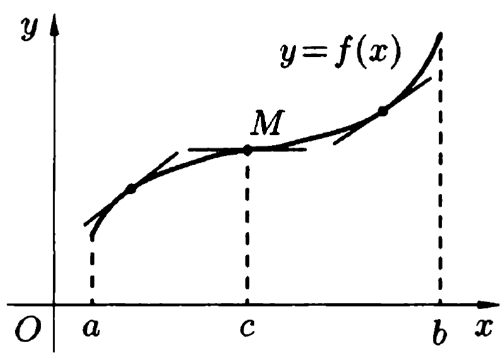


Следовательно, $x_1 = 0$ - точка максимума, $y_{max} = y(0) = 0$, и $x_2 = 8$ точка минимума, $y_{min} = y(8) = -\frac{4}{3}$.

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вниз* на интервале $(a;b)$, если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх* на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет *отрицательную вторую производную,* т. е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале *выпуклый вверх.* Если же $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$ - график *выпуклый вниз.*

Достаточное условие существования точек перегиба. Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Пример. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение: Находим, что $y' = 5x^4 - 1,\ y'' = 20x^3$. Вторая производная существует на всей числовой оси; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Отмечаем, что $y'' > 0$ при $x > 0$; $y'' < 0$ при $x < 0$.

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty;0)$ выпуклый вверх, в интервале $(0;8)$- выпуклый вниз. Точка $(0;5)$ есть точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$. Обычно это точки разрыва второго рода.

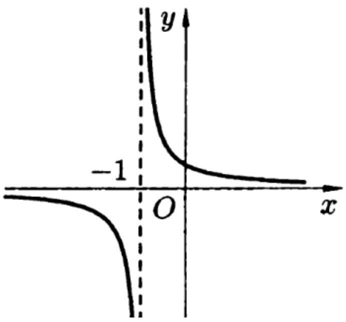


Рисунок 10 - Вертикальная и горизонтальная асимптоты

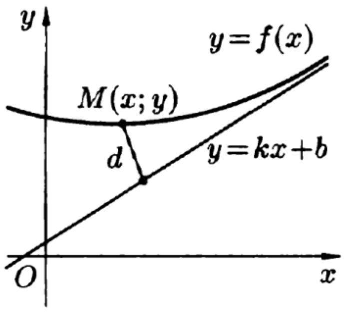


Рисунок 11 - Наклонная асимптота

Например, кривая $y = \dfrac{2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$, так как $\lim\limits_{x \to -1+0} \dfrac{2}{x+1} = +\infty,\ \lim\limits_{x \to -1-0} \dfrac{2}{x+1} = -\infty$.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b, \qquad (20)$$

где

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} (y - kx). \qquad (21)$$

Если хотя бы один из пределов (21) не существует или равен бесконечности, то кривая $y=f\left(x\right)$ наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если $k=0$, то $b=\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)$. Поэтому $y=b$ - уравнение *горизонтальной асимптоты*.

Замечание: Асимптоты графика функции $y=f\left(x\right)$ при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (21) следует отдельно рассматривать случай, когда $x\to+\infty$ и когда $x\to-\infty$.

Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y=f\left(x\right)$ целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Заметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций.

Пример. Исследовать функцию $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение: Выполним все семь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при $x=1$ и $x=-1$. Область ее определения состоит из трех интервалов $\left(-\infty;-1\right);\ \left(-1;1\right);\ \left(1;+\infty\right)$, а график из трех ветвей.

2. Если $x=0$, то $y=0$. График пересекает ось Oy в точке $O\left(0;0\right)$; если $y=0$, то $x=0$. График пересекает ось Ox в точке $O\left(0;0\right)$.

3. Функция $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ является нечетной, т. к.

$$y\left(-x\right)=\frac{-x}{1-\left(-x\right)^2}=-\frac{x}{1-x^2}=-y\left(x\right).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при $x\geq 0$.

4. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

($k = 0$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$)

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1-x^2} - 0x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение $y = 0$. Прямая $y = 0$ является асимптотой и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$.

5. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1\left(1-x^2\right) - x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2},$$

то $y' > 0$ в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

6. Исследуем функцию на экстремум. Так как $y' = \dfrac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2}$, то критическими точками являются точки $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ (y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим

$$y'' = \left(\frac{x^2+1}{\left(1-x^2\right)^2} \right)' = \frac{2x\left(1-x^2\right)^2 - \left(x^2+1\right)2\left(1-x^2\right)(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1 = 0,$ $x_2 = -1, x_3 = 1$. На рисунке 12 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции. Точка $O(0,0)$ - точка перегиба графика функции. График выпуклый вверх на интервалах $(-1;0)$ и $(1;\infty)$; выпуклый вниз на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(0;1)$.

График функции изображен на рисунке 13.

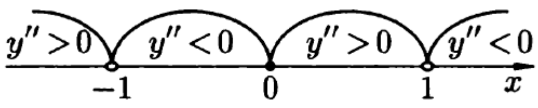


Рисунок 12

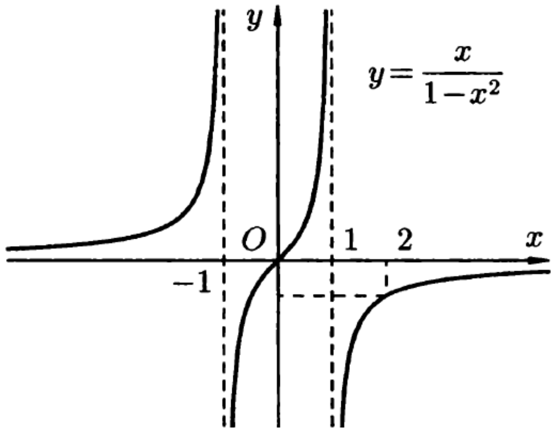


Рисунок 13

Задания для самостоятельной работы:

Построить графики функций

1. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

2. $y = 3x^2 - 2 - x^3$

3. $y = x^4 - 4x^2 + 3$

4. $y=\frac{4x}{4+x^2}, \quad [-4,\ 2].$

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

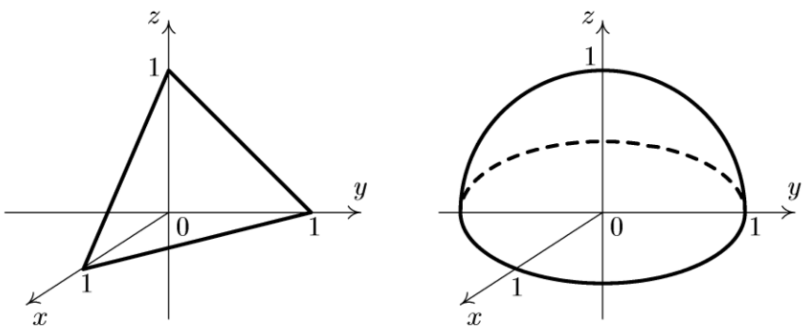
6.1. Понятие функции нескольких переменных (ФНП)

Произвольный упорядоченный набор из n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначается $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и называется точкой n-мерного арифметического пространства R^n; сами числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами точки $M = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $D \subseteq R^n$ - произвольное множество точек n-мерного арифметического пространства. Если каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция от n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. *Множество D называется областью определения функции* $f(M)$.

В частном случае, когда $n = 2$, функция двух переменных $z = f(x, y)$ может рассматриваться как функция точек плоскости xOy в трехмерном пространстве с фиксированной декартовой системой координат.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ есть множество точек трехмерного пространства (x, y, z) и представляет собой, как правило, некоторую поверхность.



$z = 1 - x - y$ $\qquad$ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Рисунок 14 - Графическое изображение функций двух переменных

Представление о функции может дать и метод линий уровня. Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости, таких, что во всех этих точках значение функции одно и то же и равно *C*. Число *C* в этом случае называется *уровнем.*

Пример 1. Найти область определения функции $z = \arccos(x^2 + y^2)$.

Функция определена при $x^2 + y^2 \le 1$. Следовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Пример 2. Найти линии уровня функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Полагаем значение функции константой $z = c = \sqrt{x^2 + y^2}$, откуда $x^2 + y^2 = c^2$. Линии уровня представляют собой концентрические окружности радиуса *c*.

На рисунке 15 представлены сечения плоскостями *z=1, z=2, z=3* поверхности функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и соответствующие этим сечениям линии уровня — окружности радиусов $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$.

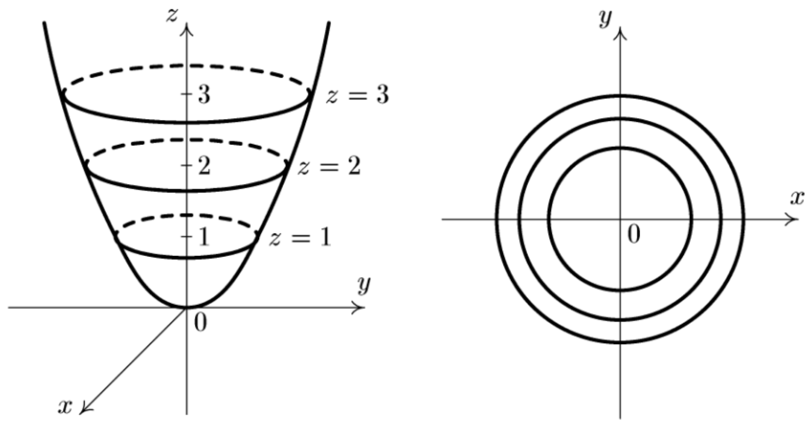


Рисунок 15 - Линии уровня функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Задания для решения в аудитории:

1. Найти области определения функций:

1.1. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^4}.$

1.2. $z = \sqrt[8]{1 - x^2 + y}.$

1.3. $z = \ln(x + y).$

1.4. $z = \arcsin x + \arccos y.$

2. Найти линии уровня функций в явном виде:

2.1. $z = xy^3.$

2.2. $z = ln\left(x^2 + y\right).$

2.4. $z = e^{x+y}.$

2.5. $z = \sqrt{y - x^2}.$

2.6. $z = tg\left(x + y\right).$

6.2. Частные производные, производные по направлению, градиент

Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x,y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε, такое, что для всех точек (x,y), отстоящих от точки (x_0, y_0) не более, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x,y) - A| < \varepsilon$: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$.

Приращение, которое получает функция нескольких переменных *f*, при изменении значения только одной переменной, например *x*, и фиксированных остальных, называется *частным приращением функции по x* - Δf_x. Аналогично вводят частные приращения по всем переменным.

Например, для функции трех переменных $f(x, y, z)$ получим

$$\Delta f_x = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z),\ \ldots,\quad \Delta f_z = f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z).$$

Переходя к соответствующим пределам, вводят частные производные ФНП по всем переменным. ***Частной производной*** ФНП, например $f(x, y, z)$, в некоторой точке *M(x,y,z)*, называется предел отношения частного приращения функции к приращению аргумента, если последнее стремится к нулю

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x^{/}(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \tag{22}$$

Частные производные вычисляются по обычным формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме варьируемой, рассматриваются как постоянные.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = \arccos\frac{x}{y}$ $(y > 0)$.

Полагая переменную величину $y = const$, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \frac{1}{y} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Считая величину x постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y} \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Производной z_l' ***по направлению l*** *функции* $z = f(x,y)$ *называется предел*

$$z_l' = \frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}. \tag{23}$$

Производная по направлению выражается через частные производные по формуле

$$z'_l = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta, \qquad (24)$$

где единичный вектор $e = l/|l| = (\cos\alpha, \cos\beta)$ задает направление l в системе координат xOy (α и β - углы, которые образует направление l с осями координат). При этом, $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ называются *направляющими косинусами вектора* *l*.

Производная по направлению характеризует изменение дифференцируемой функции в направлении этого вектора.

Градиентом ∇z функции $z = f(x, y)$ *называется вектор*, компонентами которого выступают соответствующие частные производные функции

$$\nabla z = \left(z'_x, z'_y\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \qquad (25)$$

∇ - читается "набла".

Из выражения (24) видно, что производная по направлению является скалярным произведением градиента функции и единичного вектора $e = (\cos\alpha, \cos\beta)$, задающего направление l

$$z'_l = \nabla z \cdot e^T = \left(z'_x, z'_y\right)\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \cos\beta\end{pmatrix} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta. \qquad (26)$$

Из свойств скалярного произведения следует, что наибольшее значение $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ будет тогда, когда $\cos\phi = \cos\left(\overline{\nabla z}; \bar{l}\right) = 1$, то есть, когда направление $\bar{l}$ совпадает с направлением градиента $\overline{\nabla z}$.

Градиент функции $\overline{\nabla z}$ в точке $M(x, y)$, перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку, направлен в сторону наибольшего возрастания функции и равен по величине мгновенной скорости возрастания функции.

Производная по направлению, перпендикулярному градиенту, равна нулю.

Пример 2. Найти градиент ∇z функции $z = x + e^{x+5y}$ и его длину в точке $(0;0)$.

Решение. Компонентами вектора ∇z (25) являются частные производные функции, т.е. $\nabla z = \left(1 + e^{x+5y}, 5e^{x+5y}\right)$. В точке (0; 0) получаем $\nabla z(0;0) = (2;5)$. Соответственно длина вектора ∇z равна $|\nabla z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Пример 3. Найти производную функции $z = 3y\ln x$ в точке $(2;0)$ по направлению, параллельному биссектрисе первого координатного угла.

Решение. Прямая, проходящая параллельно биссектрисе первого координатного угла, образует с осями координат равные углы $\pi/4$. Тогда

$$\nabla z = \left(\frac{3y}{x}, 3\ln x\right); \quad e = \frac{l}{|l|} = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Для производной по заданному направлению в точке $(2;0)$ получим (см.(26)):

$$z_l' = \frac{3y}{x}\cos\frac{\pi}{4} + 3\ln x\cos\frac{\pi}{4}; \qquad z_l'(2;0) = \frac{3}{\sqrt{2}}\ln 2.$$

Пример 4. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$. Найти производную $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1,1,1)$: в направлении вектора $s = 2i + j + 3k$.

Решение. Находим направляющие косинусы вектора *s*:

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|s|} = \frac{2}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{s_y}{|s|} = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{s_z}{|s|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Затем частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$, которые в точке $M(1,1,1)$ будут равны $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 2,\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 2.$

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial s}$ в точке $M(1,1,1)$ равна

$$\frac{\partial u}{\partial s} = u_s' = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

Задания для решения в аудитории:

1) Найти частные производные функций:

1.1. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$

1.2. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

1.3. $z = \frac{y}{x}$

1.4. $z = arctg\frac{y}{x}$

1.5. $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

2) Найти градиент функции $z = f(x, y)$ и его модуль для функций в указанных точках *M:*

2.1. $z = 7 - x^2 - y^2$; $M(1;2)$.

2.2. $z = x\ln(x + y)$; $M(-1;2)$.

2.3. $z = (x - y)^2$; $M(0;3)$.

2.4. $z=\sin\left(x+y^2\right)$; $M\left(\frac{\pi}{2};\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

3) Найти производные функций по заданным направлениям l:

3.1. $z=3x^4-xy+y^3$; l составляет с осью Ox угол 60°.

3.2. $z=x+y^2$; l – биссектриса 3-го координатного угла.

4) Вычислить производную функции $z=5x^4-3x-y-1$ в точке $M\left(2;1\right)$ по направлению l — прямой *MN,* где $N\left(5;5\right)$.

5) Вычислить производную функции $z=\dfrac{x}{y}$ в точке $M\left(1;1\right)$ по направлению l — перпендикуляра к прямой $y=2x-1$.

6) Найти производную функции $z=3x^2-4y^3+2xy^2-5x+7y-1$ в точке $A(0,\ 1)$ в направлении от этой точки к точке $B(4,\ 4)$.

6.3. Неявные функции и их дифференцирование

Пусть F - дифференцируемая функция трех переменных x, y и z, и пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ неявно определяет, например, z как функцию независимых переменных x и y. Тогда для отыскания $z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ зафиксируем y и потребуем выполнения равенства для частных дифференциалов

$$F'_x(x,y,z)dx + F'_z(x,y,z)dz = 0, \text{ откуда } \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (27)$$

Аналогично можно получить формулы

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z(x,y,z)}{F'_y(x,y,z)}. \qquad (28)$$

Пример 1. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^3 - 4xy^2 - 2z^2 + 1 = 0$.

$$F'_x(x,y,z) = -4y^2, \quad F'_y(x,y,z) = -8xy, \quad F'_z(x,y,z) = 3z^2 - 4z.$$

На основании (28) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{4y^2}{3z^2-4z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = \frac{8xy}{3z^2-4z}.$$

Найти частные производные функции: $-2zxy^2 + 2xz^2 + x^2y^2 = 0$

6.4. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x,y)$ есть функция двух переменных x и y. Частными производными второго порядка функции $f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема.

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Пример 1. Найти частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = z'''_{xyz}$ от функции $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.

Решение. $$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = e^x(\cos y - \sin y + x\cos y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)'_x = e^x(2\cos y - \sin y + x\cos y).$$

Задания для решения в аудитории:

Найти вторые частные производные функций:

1. $z = x^4 + 5x^2y^2 + 6xy - 7$.

2. $z = x^3 y^2 + x\sin y$.

6.5. Полное приращение и дифференциалы ФНП

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x;\ y)$. Наряду с частными, вводят понятие ***полного приращения*** *функции*

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

при котором ее аргументы x и y получают соответственно приращения Δx и Δy.

Геометрически полное приращение Δz равно приращению аппликаты графика функции $z = f(x;\ y)$ при переходе из точки $P_0(x; y)$ в точку $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$.

Полный дифференциал функции $z = f(x;\ y)$ в данной точке, называется главная часть полного приращения этой функции, линейная относительно дифференциалов независимых переменных dx и dy, то есть

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z. \tag{29}$$

Здесь использована также символическая запись дифференциала через *оператор дифференцирования.*

Геометрически дифференциал функции равен ее приращению по касательной плоскости в данной точке. Очевидно, что для конечных приращений аргументов $\Delta z \neq dz$, т.е.

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

Однако, при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ $\Delta z \to dz$. Указанный предельный переход используется в приближенных вычислениях значений функций в окрестности заданных точек.

При относительно малых приращениях аргументов можно полагать $\Delta z \approx dz$, тогда

$$f(x+\Delta x; y+\Delta y) = f(x;y) + \Delta f \approx f(x;y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \qquad (30)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy.$$

Пример 2. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $0{,}95^{2{,}03}$.

Представим выражение в виде функции двух переменных

$$\left(x+\Delta x\right)^{y+\Delta y}, \text{где} \quad x=1;\ \Delta x=-0{,}05;\ y=2;\ \Delta y=0{,}03.$$

Тогда с использованием формулы (30) получим

$$\left(x+\Delta x\right)^{y+\Delta y} \approx x^y + yx^{y-1}\cdot\Delta x + x^y\ln x\cdot\Delta y;$$

$$0{,}95^{2{,}03} \approx 1^2 - 2\cdot 1^1\cdot 0{,}05 + 1^1\cdot\ln 1\cdot 0{,}03 = 1-0{,}1 = 0{,}9.$$

При этом более точное значение $0{,}95^{2{,}03} \approx 0{,}90111230...$

Пример 3. Вычислить приближенно $\ln(\sqrt[3]{1{,}003} + \sqrt[4]{0{,}998} - 1)$.

Искомое выражение будем рассматривать как значение функции $\ln(\sqrt[3]{x+\Delta x} + \sqrt[4]{y+\Delta y} - 1)$ при $x=1$, $y=1$, $\Delta x = 0{,}003$, $\Delta y = -0{,}002$. Применяя формулу (30)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x'(x,y)\Delta x + f_y'(x,y)\Delta y,$$

получаем

$$f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0,$$

$$f_x'(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3},$$

$$f_y'(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[4]{1}-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}003 + \frac{1}{4}\cdot(-0{,}002) = 0{,}0005.$$

6.6. Дифференциал второго порядка и матрица Гессе ФНП

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка. Обозначение d^2z.

Если функция $z = f(x;\ y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка, то дифференциал второго порядка можно найти по формуле:

$$d^2z = \partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy\right)'_y \cdot dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cdot dy\right)\cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy\right)\cdot dy.$$ Тогда

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z. \qquad (31)$$

Сравнение выражений для дифференциалов первого (29) и второго (31) порядков через *оператор дифференцирования* позволяет методом индукции записать выражения и для ***дифференциалов высших порядков***:

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot z, \ \ldots, \ d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot z, \text{ где } n \in N. \qquad (32)$$

Выражение для дифференциала второго порядка (31) функции $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, имеющей непрерывные частные производные второго порядка, можно представить в виде

$$d^2z = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}dx_i\, dx_j. \qquad (33)$$

Правая часть этого выражения представляет собой *симметричную квадратичную форму* относительно дифференциалов независимых переменных $dx_1, dx_2, ..., dx_n$. Квадратичную форму можно задать её матрицей.

Матрицей Гессе H называется матрица квадратичной формы, элементы которой являются вторыми частными производными $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1} & h_{n2} & \ldots & h_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Определитель матрицы Гессе называется ***Гессианом.***

Задания для решения в аудитории:

1) Найти полные дифференциалы функций:

1.1. $z = e^{xy}(x + y)$

1.2. $z = \ln\left(1 + e^x + y^2\right)$

2) Вычислить приближенно с помощью дифференциала:

2.1. $1{,}96^2 \cdot e^{0{,}08}$

2.2. $\sqrt{1{,}02^2 + 0{,}001^2}$

3) Найти матрицу Гессе и Гессиан функции $z = 2x^2 + 3xy + 5y^2 - 3x + 8y - 11$ в точке M(1;2).

6.7. Необходимые и достаточные условия локального экстремума ФНП

Рассмотрим понятия экстремума в отношении функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x;\ y)$ определена в некоторой области D, точка $M_0(x_0;y_0)\in D$.

Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется *точкой строгого (нестрогого) локального максимума* функции $z=f(x;\ y)$, если существует такая ε-окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что для каждой точки $M(x;\ y)$, отличной от $M_0(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;\ y)<f(x_0;\ y_0)$ ($f(x;\ y)\leq f(x_0;\ y_0)$).

Точка $M_0(x_0;y_0)$ называется *точкой строгого (нестрогого) локального минимума* функции $z=f(x;\ y)$, если существует такая ε-окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$, что для каждой точки $M(x;\ y)$, отличной от $M_0(x_0;y_0)$, из этой окрестности выполняется неравенство $f(x;\ y)>f(x_0;\ y_0)$ ($f(x;\ y)\geq f(x_0;\ y_0)$).

Точки строгого (нестрогого) максимума и точки строгого (нестрогого) минимума называется *точками экстремума* функции.

Отметим, что, в силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют локальный (местный) характер. В области D функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Необходимые условия экстремума. Функция $z=F(x,y)$ может иметь экстремум только в точках, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{35}$$

Такие точки, а также точки в которых хотя бы одна из частных производных не существует, называются ***критическими.***

Геометрический смысл необходимых условий экстремума. В точках, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль, касательная плоскость к поверхности $z=F(x,y)$ параллельна плоскости xOy.

Замечание 1. Экстремум функции может быть и в тех точках, где хотя бы одна из частных производных не существует или равна бесконечности. На рисунке 16 изображена функция с конусообразным графиком. В вершине конуса — точке M_1 — находится максимальная точка функции, однако частные производные там не существуют (в соответствующей точке невозможно провести касательную плоскость) .

Замечание 2. Необходимое условие (35) недостаточно для существования экстремума. Например, у седловидной поверхности $z=x^2-y^2$, изображенной на рисунке 17, частные производные равны нулю в точке M_2, но эта точка не является экстремумом.

Рисунок 16 - Конус

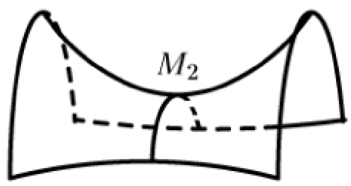


Рисунок 17 - Седловина (минимакс)

Необходимые условия экстремума (35) дифференцируемой ФНП основаны на линейной интерполяции ее поверхности - плоскостью. Для вывода достаточных условий экстремума дифференцируемой ФНП прибегают к аппроксимации ее поверхности поверхностью второго (иногда и более высокого) порядка. Так разложение приращения функции $z = F(x, y)$ в ряд Тейлора $\Delta z = dz + \frac{dz^2}{2!} + \frac{dz^3}{3!} + \ldots$ в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ с сохранением слагаемых второго порядка и при выполнении необходимых условий (35) $dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$ дает:

$$2 \cdot \Delta z \approx dz^2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M \cdot \Delta x^2 + 2 \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M \cdot \Delta x \, \Delta y + \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M \cdot \Delta y^2 . \qquad (36)$$

Полученное выражение представляет квадратичную форму с матрицей Гессе (34), которая при обозначениях

$$A = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_M, \quad B = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right|_M, \quad C = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_M \text{ принимает вид: } H_M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Анализ возможных значений элементов этой матрицы и соответствующих поверхностей второго порядка позволяет обосновывать

Достаточные условия экстремума функции двух переменных $z = F(x, y)$ в $M(x_0, y_0)$. Если:

1) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, то $\quad F(x_0, y_0) = z_{\max}$, при $A < 0$;
$\quad F(x_0, y_0) = z_{\min}$, при $A > 0$;

2) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то экстремума нет; (38)

3) $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть (сомнительный случай, требующий дополнительных исследований).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 + 9xy$.

Найдём критические точки, решив систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 9y = 0; \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 9x = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^2, \\ \dfrac{1}{9}x^4 + 3x = 0 \end{cases}, \text{ отсюда } \begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = 0; \\ x_2 = -3,\ y_2 = -3. \end{cases}$$

Тогда $P_1(0;0)$ и $P_2(-3;-3)$ - критические точки.

Найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 9, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Вычислим значения частных производных второго порядка в критических точках:

а) для точки $P_1(0;0)$:

$$A_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0;0)} = 6 \cdot 0 = 0, \quad B_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(0;0)} = 9, \quad C_1 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0;0)} = 6 \cdot 0 = 0;$$

б) для точки $P_2(-3;-3)$:

$$A_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-3;-3)} = -18, \quad B_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{(-3;-3)} = 9, \quad C_2 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-3;-3)} = -18.$$

Найдём определители (гессианы) для каждой точки:

$$\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - 9^2 = -81, \quad \Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = -18 \cdot (-18) - 9^2 = 243.$$

Так как $\Delta_1 < 0$, тогда в точке $P_1(0;0)$ экстремума нет.

Так как $\Delta_2 > 0$, тогда в точке $P_2(-3;-3)$ экстремум есть, причём $A_2 < 0$, значит, в этой точке находится максимум функции:

$$z_{\max} = z(-3;-3) = (-3)^3 + (-3)^3 + 9 \cdot (-3) \cdot (-3) = 27.$$

Представленные выше (38) *достаточные условия экстремума* функций двух переменных являются частным случаем соответствующего критерия экстремума ФНП произвольной размерности, известного как критерий Сильвестра.

Рассмотрим квадратичную форму (33) с матрицей Гессе (34) на предмет положительной (или отрицательной) определенности.

Симметричная квадратичная форма от переменных $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ называется *положительно определенной (отрицательно определенной)*, если она имеет положительные (отрицательные) значения при всех значениях переменных $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ не равных одновременно нулю (т.е. $d^2z > 0$ или $d^2z < 0$).

Если симметричная квадратичная форма имеет как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знакопеременной*.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы симметричная форма была *положительно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы формы были положительны, т.е. чтобы выполнялись условия

$$\Delta_1 > 0,\ \ \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \tag{39}$$

Для того чтобы симметричная квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, причем $\Delta_1 < 0$, т.е. чтобы выполнялись условия

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ \Delta_3 < 0,\ \Delta_4 > 0,\ \ \dots \tag{40}$$

Главными называются миноры вида (см. (34))

$$\Delta_1 = h_{11},\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix},\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix},\ \ \dots \tag{41}$$

Достаточные условия экстремума функции многих переменных

Пусть в критической точке *Po* и в некоторой ее окрестности функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет все непрерывные частные производные. Тогда, если в этой точке второй дифференциал d^2z (33) является знакоопределенной квадратичной формой от дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ независимых переменных, данная функция имеет в точке *Po* локальный экстремум. При этом

1) если $d^2z > 0$ является *положительно определенной* квадратичной формой, то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке *Po* локальный *минимум*;

2) если $d^2z < 0$ является *отрицательно определенной* квадратичной формой, то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в точке *Po* локальный *максимум*.

Если же d^2z является з*накопеременной* квадратичной формой, то функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не имеет в точке *Po* локального экстремума.

Очевидно, что достаточные условия существования экстремума функции двух переменных (38), являются частным случаем рассмотренных.

Задания для решения в аудитории:

Найти экстремум функций:

1. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

2. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1$.

3. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

6.8. Условный экстремум

Условным экстремумом функции $z = f(x;\ y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что сами переменные x и y связаны уравнением $\varphi(x;\ y) = 0$.

Геометрически это означает, что кроме функции $z = f(x;\ y)$ задана еще некоторая линия L в плоскости xOy, и требуется функцию z исследовать на экстремум при условии, что экстремальные точки могут принадлежать только этой линии L. Эти точки называются *точками условного экстремума*, а уравнение, связывающее переменные x и y, — *уравнением связи*.

Метод подстановки

Если из уравнения связи $\varphi(x;y) = 0$ выразить одну переменную через другую и подставить в $z = f(x;\ y)$, то получим функцию одной переменной. Найдя те значения переменной, при которых z достигает экстремума, подставим их в уравнение связи и определим соответствующие значения другой переменной. В результате будут получены точки условного экстремума.

Метод множителей Лагранжа

Выразить одну переменную через другую из выражения $\varphi(x;y) = 0$ не всегда просто, а нередко и невозможно, поэтому, для решения задачи условного экстремума на основе $z = f(x;\ y)$ и $\varphi(x;y) = 0$ строится вспомогательная функция - ***функция Лагранжа***:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda \cdot \phi(x;y), \qquad (42)$$

где λ – вспомогательный параметр (***множитель Лагранжа***).

В дальнейшем отыскание условного экстремума сводится к отысканию безусловного экстремума данной функции Лагранжа.

Геометрический смысл метода заключается в том, что условный экстремум достигается в той точке ограничительной линии $\phi(x;y) = 0$, в которой градиенты двух функций лежат на одной линии, т.е. пропорциональны $\overline{\nabla f} = k \cdot \overline{\nabla \phi}$.

Так, *необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид:*

$$\begin{cases} \overline{\nabla f} = k \cdot \overline{\nabla \phi} \\ \phi(x;y) = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \phi(x;y) = 0. \end{cases} \qquad (43)$$

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 6x - 2y + 1$ при условии, что переменные x и y связаны уравнением $x^2 + y - 4 = 0$.

Первый способ решения.

Уравнение связи представляет уравнение параболы $y = 4 - x^2$. Заменив в заданной функции z переменную y, получим

$$z(x) = x^2 + 6x - 2\left(4 - x^2\right) + 1 = 3x^2 + 6x - 7.$$

Полученную функцию одной переменной исследуем на экстремум.

$$z'(x) = 6x + 6 = 0; \qquad x_0 = -1$$

$x_0 = -1$ - стационарная точка функции $z(x)$.

Находим вторую производную: $z''(x) = 6 > 0$.

Так как вторая производная положительна, то в найденной стационарной точке функция $z(x)$ имеет минимум.

Подставив $x_0 = -1$ в уравнение связи, получим $y_0 = 4 - (-1)^2 = 3$.

Следовательно, точка $P_0(-1;3)$ — точка условного минимума.

$$z_{\min} = z(-1;3) = (-1)^2 + 6(-1) - 2 \cdot 3 + 1 = -10.$$

Второй способ решения.

Определим теперь точку условного экстремума, пользуясь методом множителей Лагранжа.

1) Составляем вспомогательную функцию Лагранжа.

Так как по условию $z = x^2 + 6x - 2y + 1$; $\quad \phi(x;y) = x^2 + y - 4$, то по (42)

$$L(x;y;\lambda) = x^2 + 6x - 2y + 1 + \lambda \cdot \left(x^2 + y - 4\right).$$

2) Приравняв частные производные нулю, получаем систему (43):

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 6 + \lambda \cdot 2x = 0, \\ L'_y = -2 + \lambda = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\lambda = 2$, тогда из первого уравнения следует $x = -1$, а из третьего $y = 3$.

Таким образом, $P_0(-1;3)$ — единственная точка, которая может быть точкой условного экстремума. Большего метод Лагранжа не дает. В этом смысле первый способ решения предпочтительнее.

Однако, метод множителей Лагранжа может быть использован и при исследовании на экстремум функции большего числа переменных.

Пусть задана функция трех переменных $u = f\left(x, y, z\right)$, где переменные x, y, z связаны между собой уравнением $\phi\left(x, y, z\right) = 0$.

В этом случае вспомогательная функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \cdot \phi(x, y, z). \tag{44}$$

Переменные x, y, z могут быть связаны двумя уравнениями связи:

$$\phi\left(x, y, z\right) = 0 \quad \text{и} \quad g\left(x, y, z\right) = 0.$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda_1 \cdot \phi(x, y, z) + \lambda_2 \cdot g(x, y, z). \tag{45}$$

Задания для решения в аудитории:

Исследовать функции на условный экстремум:

1. $z = 2x^2 + y^2$ при $x + y - 2 = 0$.

2. $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ при $x+y=2$.

3. $z = xy^2$ при $x + 2y = 4$.

6.9. Наибольшее (наименьшее) значение ФНП

Определяется как наибольшее (наименьшее) значение функции $z = F(x, y)$ в замкнутой области *из ее значений в критических точках внутри области и на каждой из ее границ.*

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = y^2 + 4x^2$ на круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Критическая точка $x = 0,\ y = 0$ — единственная и расположена внутри круга, $z(0;0) = 0$.

Подставим уравнение границы круга (окружности) $y^2 = 1 - x^2$ в уравнение исследуемой функции, тогда $z = 1 + 3x^2$, где $0 \le x^2 \le 1$.

Исследуем эту функцию на наибольшее и наименьшее значение внутри отрезка. На границе имеем $z_{\min}(0) = 1$, $z_{\max}(1) = 4$.

Следовательно, наименьшее значение $z = 0$ принимается внутри круга, наибольшее $z = 4$ — на его границе.

Задания для решения в аудитории:

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в областях, задаваемых неравенствами:

1. $z = x - 2y + 5,\ x > 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 1.$

2. $z = \ln(x+y)$, $(x-2)^2 + (y-2)^2 \le 1$.

6.10. Метод наименьших квадратов

В социально-экономических науках одной из важнейших задач является задача определения аналитических зависимостей между различными величинами. Получение соответствующих формул позволяет лучше понять ситуацию и спрогнозировать как она будет меняться в будущем.

Одним из наилучших способов получения таких формул — это метод наименьших квадратов.

Постановка задачи. Производится *n* наблюдений $(x_1, y_1),...,(x_n, y_n)$ переменных *x* и *y*. Предполагая, что между *x* и *y* существует зависимость вида $y = f(x)$, требуется найти значения параметров *a*, *b,... этой функции* наилучшим образом согласованные с экспериментальными данными.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции $f(x)$ следует выбирать так, чтобы сумма квадратов невязок была наименьшей.

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2 \to \min \tag{46}$$

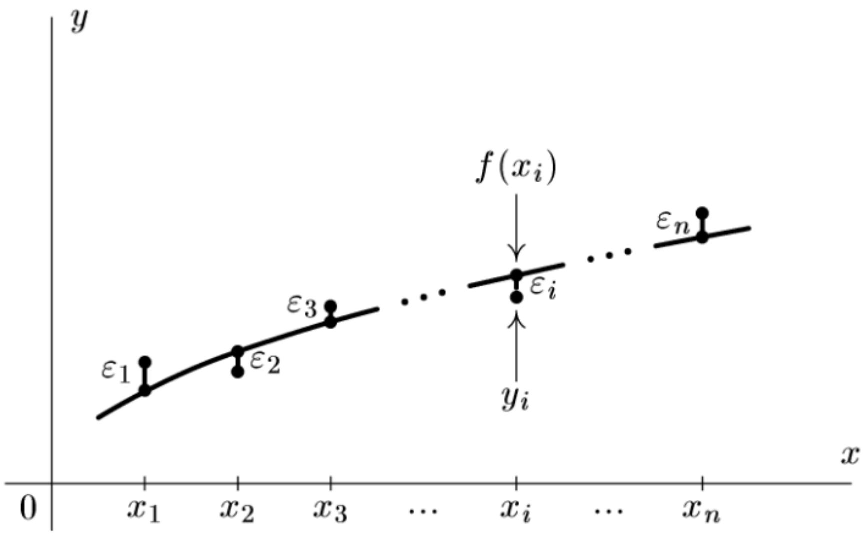


Рисунок 16 - К методу наименьших квадратов

Если $f(x)$ — линейная функция, т.е. $y = ax + b$, то $S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right)^2$, а неизвестные параметры *a и b* определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} S'_a = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right) \cdot x_i = 0; \\ S'_b = 2\sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right) \cdot 1 = 0. \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{47}$$

Если $f(x)$ — квадратичная функция вида $y = ax^2 + bx + c$, то $S = \sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2$, а неизвестные параметры a, b, c определяются из необходимых условий экстремума системой нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)b + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{48}$$

Пример 1. Имеются следующие данные о величине пробега автомобиля x (тыс. км) и y — расходе масла (л/тыс. км):

x_i	50	70	90	110	130
y_i	0,2	0,5	0,8	1,1	1,3

Полагая, что между переменными x и y существует линейная зависимость, найти эмпирическую формулу $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

Решение. Найдем необходимые для решения суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Промежуточные вычисления представлены в таблице:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	50	0,2	10	2500
2	70	0,5	35	4900
3	90	0,8	72	8100
4	110	1,1	121	12 100
5	130	1,3	169	16 900
Σ	**450**	**3,9**	**407**	**44 500**

Система нормальных уравнений (47) примет вид:

$$\begin{cases} 44500a + 450b = 407; \\ 450a + 5b = 3{,}9. \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0{,}014; \\ b = -0{,}48. \end{cases}$$

Таким образом, наилучшей в смысле МНК линейной аппроксимацией экспериментальных данных является функция: $y = 0{,}014x - 0{,}48$.

Задания для решения в аудитории:

1. Имеется четыре измерения пары переменных (x, y), результаты которых приведены в таблице:

x	1	2	3	4
y	0,2	0,3	1,0	1,2

Методом наименьших квадратов получить линейную зависимость $y = ax + b$. Сравнить полученную зависимость с альтернативной $y = \frac{1}{8}x^2$ и определить, какая из них лучше соответствует экспериментальным данным. Построить на плоскости полученные зависимости и исходные точки таблицы.

2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед.) и сбыте продукции (тыс. ед.):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Предполагая, что между переменными x и y существует квадратичная зависимость вида $y = ax^2 + bx + c$, найти значения параметров a, b, c методом наименьших квадратов.

Контрольная работа "ФНП" (типовые варианты)

Вариант 1

1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.
2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \arcsin\dfrac{x+y}{xy}$.
3. Исследовать на экстремум $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2$.
4. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке (3; 1) в направлении от этой точки к точке (6; 5).
5. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $(1{,}001)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{0{,}98}}$

Вариант 2

1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{xy} + \ln(x + \ln y)$.
2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \sin(x+y) + tg(x^2 y)$.
3. Исследовать на экстремум $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
4. Найти производную функции $z = arctg\ xy$ в точке (1; 1) в направлении биссектрисы 1-го координатного угла.
5. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $0{,}97^{2{,}02}$

Вариант 3

1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = arctg\dfrac{x}{y}$.
2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \ln(x^2 + 3y^2 + xy)$.
3. Исследовать на экстремум $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6$.
4. Найти производную функции $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ в точке (2; 1) в направлении от этой точки к началу координат.
5. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\ln\left(0{,}01 + \sqrt{(0{,}01)^2 + (1{,}02)^2}\right)$

Вариант 4

1. Найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = arctg\dfrac{x+y}{y}$.
2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = tg\dfrac{x}{y} \cdot \sin\dfrac{y}{x}$.
3. Исследовать на экстремум $z = x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3$.
4. Найти производную функции $z = arctg\dfrac{x}{y}$ в точке (1; 1) в направлении луча, образующего угол в 60° с осью OX.
5. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $1{,}002 \cdot 2{,}003^2$

Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

1.$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2.$(u \cdot v)' = u'v + uv'$, в частности,$(cu)' = c \cdot u'$;

3.$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, в частности$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;

4. $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, если $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

Формулы дифференцирования

1.$(c)' = 0$;

2.$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, в частности,$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \left(u^{-1}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$

3.$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, в частности, $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4.$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, в частности $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5.$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 6.$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

7.$(tg u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 8.$(ctg u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

9.$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 10.$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11.$(arctg u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 12.$(arcctg u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13.$(sh u)' = ch u \cdot u'$; 14.$(ch u)' = sh u \cdot u'$;

15.$(th u)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$; 16.$(cth u)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 1. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - (Гр.).
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов втузов в 2-х т. Т. 2. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 544 с. - (Гр.).
4. Ильин, В. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2006. - 600 с. - (Классический университетский учебник. Гр.).
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.
6. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие. - Ставрополь : Сервисшкола, 2016. - 80с.
7. Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Яновский А.А. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных: Учебное пособие, 2-е издание– Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 62с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 29.08.2020. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/16. Усл. печ. л.4,65. Тираж 255 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "АГРУС" Ставропольского ГАУ, Ставрополь, ул. Пушкина,15. тел. 35-06-94.